jueves, 30 de junio de 2022

Cálculo Diferencial

Aproximación lineal de una función de una variable

Sea $y = f(x)$ una función derivable en $V_\delta(x_0)$

Se tiene que para un cambio en la variable independiente x (de x_0 a x_1):

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \overbrace{dx}^{\Delta x}$$

$$f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$$; siempre que

$dx \to 0$
ó $x_1 \to x_0$
ó x_1 muy cercano a x_0

⇓

$$f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0), \quad x_1 \text{ muy cercano a } x_0$$

. El valor x_1 es variable. Por tanto en la vecindad $V_\delta(x_0)$ se tiene

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad \forall x \in V_\delta(x_0)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot x - x_0 f'(x_0)$$

$$f(\boxed{x}) \approx \underbrace{\left(f(x_0) - x_0 f'(x_0)\right)}_{b} + \underbrace{f'(x_0)}_{m} \cdot \boxed{x}$$

$$f(x) \approx b + m \cdot x$$

$$f(x) \approx \underbrace{mx + b}$$

ecuación de una recta.

(aproximación afín lineal de la función $y = f(x)$ en la vecindad $V_\delta(x_0)$).

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Extremos Relativos de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$y = f(x)$ y $f(b)$ $y = f(x)$ $y = f(x)$

a b c d e g h i j x

- En $x = b$ existe un valor mínimo relativo o local $(f(b))$ de la función $y = f(x)$
- En $x = i$ existe un valor mínimo " " " $(f(i))$ " " $y = f(x)$

Note que $f'(b) = \nexists$

$f'(i) = 0$

- Además en $x = c$ y en $x = e$, f posee extremos máximos locales, cuyos valores son respectivamente $f(c)$ y $f(e)$.
- Note que $f'(c) = \nexists$, $f'(e) = 0$
  siendo $x = c$, $x = e$ puntos del INTERIOR del dominio de la función f continua en vecindades de los mismos.

Definición de máximo local de una función $y=f(x)$

Sea $y=f(x)$ una función continua en una vecindad del punto $x=x_0$ (f es continua $\forall\ x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$), $x_0 \in Int(Dom(f))$. Decimos que el valor máximo local de la función $y=f(x)$ ocurre en $x=x_0$ si y solo si:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall\ x \in V_\delta(x_0)$$

Definición de mínimo local de una función $y = f(x)$

Sea $y = f(x)$ una función continua en una vecindad del punto $x = x_0$ (f es continua $\forall\ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$), $x_0 \in Int(Dom(f))$. Decimos que el valor mínimo local de la función $y = f(x)$ ocurre en $x = x_0$ si y solo si:

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall\ x \in V_\delta(x_0)$$

Definición de máximo GLOBAL de una función $y = f(x)$

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = y$

Decimos que f tiene un máximo GLOBAL o ABSOLUTO en $x = x_0$ si y solo si

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in A$$

Definición de mínimo GLOBAL de una función $y = f(x)$

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = y$$

Decimos que f tiene un máximo GLOBAL o ABSOLUTO en $x = x_0$ si y solo si

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall\, x \in A$$

Técnica para determinar extremos relativos de una función $y = f(x)$

Teorema.- Si f tiene un extremo relativo o local en $x = x_0$ ENTONCES $\Longrightarrow$

$$f'(x_0) = 0 \ \vee \ f'(x_0) \text{ no existe}$$

Por contrarrecíproca:

Si $f'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in Dom(f)$ y $f'(x)$ existe $\forall \ x \in Dom(f)$ entonces $\Longrightarrow$ f no posee extremos relativos en el dominio dado.

Nota:

Si $y=f(x)$ tiene puntos para los cuales $f'(x)$ se anula o no existe, entonces esos puntos constituyen CANDIDATOS a extremos relativos. Estos puntos reciben el nombre de puntos críticos de 1era especie.

Definición: Sea $y=f(x)$ una función continua en $V_\delta(x_0)$, $x_0 \in Int(Dom(f))$. Si

$f'(x_0)=0$ ó $f'(x_0)$ no existe, llamamos a $x=x_0$ punto crítico de primera especie de la función f. Los puntos críticos son CANDIDATOS a extremos relativos de f.

Ejemplos :

(puntos donde la función f podría tener extremos relativos)

Determine los puntos críticos de primera especie de las sgtes funciones :

a) $y = \ln x$

b) $y = x^{2/3}$

c) $y = x^{31}$

d) $y = x^3 - x + 2$

Solución :

a) $y = \ln x = f(x)$

$Dom(f) = x \in]0, \infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

$f'(x) = \nexists \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

($x = 0$: pero no pertenece a Int(Dom(f)))

No existen puntos críticos de 1era especie

(f no tiene extremos relativos)

b) $y = x^{2/3}$